Wykład 9

14 maja 2021
10:06

Def: Funkcja $f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ jest mierzalna jeśli $\forall_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \quad f^{-1}(B) \in \Sigma$ oraz $f^{-1}(\pm\infty) \in \Sigma$

Jeżeli (Ω, Σ, μ) prz. z miarą i $f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+ = [0, +\infty]$

to
$$\int_\Omega f \, d\mu = \sup\{\sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) ; \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i} \le f\}$$

$[0 \cdot \infty = 0]$

$$= \begin{cases} \int_{\{\omega: f(\omega) < \infty\}} f \, d\mu & \mu(f = +\infty) = 0 \\ +\infty & \mu(f = +\infty) \neq 0 \end{cases}$$

Tw. (R-N (3) gdzie ν - dowolna, a μ - σ-skończona)

Niech ν, μ miary na (Ω, Σ), t.że $\nu \ll \mu$, ν - dowolna i μ - σ-skończona. Wtedy istnieje funkcja mierzalna $f_0: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+ = [0, +\infty]$, t.że

$$\forall_{A \in \Sigma} \quad \nu(A) = \int_A f_0 \, d\mu$$

Funkcja f_0 jest wyznaczona jednoznacznie μ-p.w. i jest skończona μ-p.w. na zbiorach, na których

ν jest σ-skończona.

Dowód: Wystarczy pokazać tezę w przypadku, gdy μ jest skończona (bo ogólnie $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, $\mu(\Omega_i) < \infty$)

Niech zatem $\mu(\Omega) < +\infty$.

Niech

$$\mathcal{F} = \{ A \in \Sigma : A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n ,\ \nu(A_n) < \infty \}$$

rodzina zb. o mierze ν σ-skończonej

Zauważmy, że $\mathcal{F}$ jest σ-pierścieniem.

Połóżmy

$$\alpha := \sup_{A \in \mathcal{F}} \mu(A) \leq \mu(\Omega) < \infty$$

To supremum realizuje się dla pewnego $A_0 \in \mathcal{F}$. Rzeczywiście, weźmy ciąg $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ taki, że $\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \alpha$. Wtedy $A_0 := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (bo $\mathcal{F}$ σ-pierścień) oraz $\mu(A_0) = \alpha$.

Twierdzimy, że na A_0' miara ν jest trywialna — przyjmuje tylko wartości 0 i $+\infty$.

Załóżmy nie wprost, że istnieje $B \subseteq A_0'$ taki, że załóżmy, że ...

$0 < \nu(B) < +\infty$. Wtedy $B \in \mathcal{F}$ $(\nu(B) < +\infty)$

oraz $\mu(B) > 0$ (bo $\nu \ll \mu$ i $\nu(B) > 0$)

Prowadzi to do sprzeczności

(*) $\alpha = \sup_{A \in \mathcal{F}} \mu(A) = \mu(A_0) < \mu(A_0) + \mu(B) = \mu(\underbrace{\underset{\in\mathcal{F}}{A_0} \sqcup \underset{\in\mathcal{F}}{B}}_{\in \mathcal{F}}) \leq \alpha$

$$\boxed{\alpha < \alpha \ \lightning}$$

Zatem $B \subseteq A_0' \Rightarrow \nu(B) \in \{0, +\infty\}$

Równolegle twierdzimy, że $\nu(B) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$

bo gdyby $\nu(B) = 0$ i $\mu(B) > 0$, to

$A_0 \sqcup \underset{\in \mathcal{F} \text{ bo } \nu(B)=0}{B} \in \mathcal{F}$ i stąd dostajemy sprzeczność (*)

Reasumując

$$\boxed{\forall_{B \subseteq A_0'} \quad \nu(B) < \infty \iff \nu(B) = 0 \iff \mu(B) = 0}$$

Miara ν obcięta od (A_0, Σ_{A_0}) jest σ-skończona (bo $A_0 \in \mathcal{F}$). Zatem z Tw R-N (2) istnieje

funkcja $f_0 : A_0 \longrightarrow [0, +\infty)$ t. że funkcja $f_0 : A_0 \to [0, +\infty)$ t. że

$$\forall_{A \subseteq A_0} \quad \nu(A) = \int_A f_0 \, d\mu$$

i f_0 jest wyznaczone jednoznacznie μ-p.w. na A_0

Połóżmy

$$f_0\big|_{A_0'} \equiv +\infty$$

Wtedy $f_0 : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+ = [0, \infty]$ mierzalna i dla $A \subseteq A_0'$ mamy

$$\int_A f_0 \, d\mu \overset{f_0 \equiv +\infty}{=\!=} \left\{ +\infty \cdot \mu(A) \right\} = \begin{cases} +\infty & , \mu(A) > 0 \\ 0 & , \mu(A) = 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} +\infty & , \nu(A) = +\infty \\ 0 & , \nu(A) = 0 \end{cases} = \nu(A)$$

Stąd dla $A \in \Sigma$ mamy

$$\int_A f_0 \, d\mu = \int_{A \cap A_0} f_0 \, d\mu + \int_{A \cap A_0'} f_0 \, d\mu = \nu(A \cap A_0) +$$

$$+ \nu(A \cap A_0') = \nu(A).$$

Trzeba jeszcze wykazać jednoznaczności f_0 na A_0'

Załóżmy nie wprost, że istnieje $f_0' : A_0' \to [0,+\infty]$ taka, że

$$\forall_{A \subseteq A_0'} \int_A f_0' \, d\mu = \nu(A) = \begin{cases} +\infty, & \mu(A) > 0 \\ 0, & \mu(A) = 0 \end{cases}$$

ale $f_0' < \infty$ na pewnym $B \subseteq A_0'$ takim, że $\mu(B) > 0$. Kładziemy

$$B_n := \{\omega \in B : f_0'(\omega) \leq n\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Mamy

$$\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A_0' \quad \text{oraz} \quad B_n \nearrow B,$$

skąd

$$\lim_{n \to \infty} \mu(B_n) \overset{\text{ciągłość}}{\underset{\text{miary}}{=}} \mu(B) > 0$$

Zatem dla dostatecznie dużych n mamy $\mu(B_n) > 0$

Ale $\mu(B_n) > 0 \Rightarrow \nu(B_n) = +\infty$, skąd

$$+\infty = \nu(B_n) \overset{R-N}{=} \int_{B_n} \underbrace{f_0'}_{\leq n} \, d\mu \leq n \cdot \underbrace{\mu(B_n)}_{< +\infty} < +\infty$$

$\uparrow$ bo μ skończona

Uwaga: Jeśli μ nie jest σ-skończona, to $\blacksquare$

Tw. R-N może nie zachodzić

Przykład (Saks 1937) Na prostej mierzalnej $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ rozważmy miarę liczącą μ i miarę Lebesgue'a ν.

Wtedy $\nu \ll \mu$ (bo μ ma tylko jeden zbiór miary zero)

Ale nie istnieje funkcja $f_0 : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}^+ = [0, +\infty]$

t. że

$$\forall_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \quad \nu(A) = \int_A f_0 \, d\mu,$$

Bo gdyby taka funkcja istniała, to

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad 0 = \nu(\{x\}) = \int_{\{x\}} f_0 \, d\mu = f_0(x)\mu(\{x\}) = f_0(x)$$

Czyli $f_0 \equiv 0$, a stąd

$$1 = \nu([0,1]) = \int_{[0,1]} f_0 \, d\mu = \int_{[0,1]} 0 \, d\mu = 0$$

Def: Quasi-funkcją na (Ω, Σ, μ), czy też μ-quasi-funkcją nazywamy rodzinę $\{g_A\}_{A \in \mathcal{F}}$

indeksowany δ-pierścieniem zbiorów o mierze δ-skończonej

$$F := \{A \in \Sigma : A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ \mu(A_n) < +\infty\}$$

Takką, że dla każdych $A, B \in F$

(1) $g_A : \Omega \to [0, +\infty]$ mierzalna

(2) $g_A \equiv 0$ μ-p.w. poza zb. A

(3) $g_A = g_B$ μ-p.w. na $A \cap B$.

Przykład: Jeśli $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$ funkcja mierzalna, to kładąc

$$g_A := g \cdot \mathbb{1}_A, \qquad A \in F$$

otrzymujemy quasi-funkcję $\{g_A\}_{A \in F}$ $\boxed{\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cap B}}$

Def: Powiemy, że quasi-funkcja $\{g_A\}_{A \in F}$ pochodzi od funkcji jeżeli istnieje funkcja mierzalna $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$ taka, że $g_A = g \cdot \mathbb{1}_A$ μ-p.w. dla $A \in F$.

STW. (R-N(4) dla quasi-funkcji)

Dla dowolnych miar ν, μ na (Ω, Σ) takich, że

Dla dowolnych miar ν, μ na (S, Σ) takich, że $\nu << \mu$ istnieje μ-quasi-funkcja $\{g_A\}_{A \in \mathcal{F}}$ t. że

$$\forall_{A \in \mathcal{F}} \quad \nu(A) = \int_A g_A \, d\mu \qquad (**)$$

Quasi-funkcja $\{g_A\}_{A \in \mathcal{F}}$ jest wyznaczona jednoznacznie μ-p.w.

Dowód: Dla każdego $A \in \mathcal{F}$ możemy zastosować Tw. R-N (3) do ν i μ obciętych do (A, Σ_A) gdzie $\Sigma_A = \{B \in \Sigma : B \subseteq A\}$. Zatem istnieje $g_A : A \to \overline{\mathbb{R}}^+$ taka, że $\forall_{C \subseteq A} \; \nu(C) = \int_C g_A \, d\mu$

i g_A jest wyznaczona jednoznacznie μ-p.w.

Włożmy $g_A \equiv 0$ na A' otrzymujemy rodzinę $\{g_A\}_{A \in \mathcal{F}}$ spełnia $(**)$, oraz (1) i (2) w def. quasi-funkcji. Ponadto jeśli $A, B \in \mathcal{F}$, to dla dowolnego $C \subseteq A \cap B$ mamy

$$\nu(C) = \int_C g_A \, d\mu = \int_C g_B \, d\mu = \int_C g_{A \cap B} \, d\mu$$

Stąd i z jednoznaczności g_A dostajemy, że

$$g_A = g_B = g_{A\cap B} \quad \mu\text{-p.w. na } A\cap B$$

Czyli $\{g_A\}_{A\in F}$ jest szukaną quasi-funkcją. $\boxtimes$

Pytanie 1: Kiedy quasi-funkcję $\{g_A\}_{A\in F}$ „da się skleić"
$\qquad\qquad \shortparallel$
do funkcji mierzalnej $g:\Omega\to\mathbb{R}^+$

Pytanie 2: Jeżeli $\{g_A\}_{A\in F}$ pochodzi od funkcji g, to czy własności $(\ast\ast)$ da się przedłużyć na wszystkie zbiory $A\in\Sigma$ (nie tylko te z F)

Przykład (Saks) μ – miara licząca na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Niech $V\subseteq\mathbb{R}$ zbiór nieborelowski, $V\notin\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Wtedy $g = \mathbb{1}_V$ nie jest funkcją mierzalną oraz $\{g_A\}_{A\in F}$ gdzie $g_A = g\cdot\mathbb{1}_A = \underbrace{\mathbb{1}_{A\cap V}}_{\text{przeliczalny}}$

jest quasi-funkcją, bo

$$F = \{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}) : A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ \mu(A_n)<\infty\} \xlongequal[\text{licząca}]{\mu\text{-miara}} \{A\subseteq\mathbb{R} \text{ przeliczalny}\}$$

a zatem g_A jest funkcją mierzalną jako funkcja charakterystyczną zb. przeliczalnego, a więc mierzalnego.

Quasi-funkcji $\{g_A\}_{A \in F}$ nie da się skleić do funkcji mierzalnej!